RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 aprile 1921.

V. VOLTERRA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulle funzioni abeliane.* III: *Le varietà di Jacobi.* Nota del Socio G. CASTELNUOVO.

9. Tra le varietà abeliane (1) rientrano, come casi particolari notevoli, le *varietà di Jacobi*. Si indica con questo nome una V_p, i cui punti corrispondono birazionalmente ai gruppi di p punti, G_p, di una curva C di genere p; supporremo soddisfatta la condizione che gruppi equivalenti (speciali) di C abbiano per immagine un solo punto di V_p. Se indichiamo con $j_1(\zeta), \dots, j_p(\zeta)$ i valori di p integrali indipendenti di prima specie nel punto ζ di C, la V_p si definisce esprimendo che le coordinate cartesiane $x_1, \dots, x_{p+1}$ di un suo punto generico sono $p+1$ funzioni abeliane indipendenti [II, (21)] dei p parametri

$$u_i = j_i(\zeta_1) + j_i(\zeta_2) + \cdots + j_i(\zeta_p) \qquad (i = 1, 2, \dots, p). \tag{29}$$

La matrice dei periodi di queste funzioni può sempre supporsi ridotta al tipo normale

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_{pp} \end{vmatrix} \qquad (\sigma_{ik} = \sigma_{ki}). \tag{30}$$

(1) Ved. le due Note precedenti, che verranno indicate con I e II; questi Rendiconti, vol. XXX, 1° sem. 1921, fasc. 2°, pag. 50, e fasc. 4°, pag. 99.

La V_p di Jacobi presenta, rispetto alle varietà abeliane generali, alcune particolarità dipendenti dal fatto che i gruppi speciali G_p della curva C (appartenenti dunque alla serie canonica g^{p-1}_{2p-2}) hanno per immagini in V_p i punti di una varietà algebrica W_{p-2} a $p-2$ dimensioni (ogni punto della quale rappresenta infiniti G_p equivalenti).

Nella V_p di Jacobi è sempre contenuto un sistema continuo $\infty^p \{\Theta\}$ di varietà a $p-1$ dimensioni, rappresentate dall'annullarsi di una funzione Θ del 1° ordine (ϑ riemanniana). Ciascuna di quelle rappresenta gli ∞^{p-1} G_p contenuti in una serie non speciale g^{p-1}_{2p-1}. Se questa serie si riduce alla g^{p-1}_{2p-2} canonica, ai cui gruppi sia stato aggiunto un punto fisso a, la corrispondente varietà Θ diviene (come diremo) *speciale*, passa per la W_{p-2} e rappresenta l'insieme dei gruppi G_p che hanno un punto fisso a. Esistono ∞^1 varietà Θ speciali; due, tre, ... , $p-1$ di esse si intersecano, fuori di W_{p-2}, in una varietà a $p-2$, $p-3$, ... , 1 dimensione, la quale rappresenta i G_p con 2 , 3 , ... , $p-1$ punti fissi.

10. Supponiamo ora che in V_p esista una varietà intermediaria, a $p-1$ dimensioni, Φ, cogli interi caratteristici m_{ik} ed il determinante $\delta = \sqrt{\|m_{ik}\|} > 0$ (I, n 1; II, n. 5); la Φ formerà parte di un sistema continuo $\{\Phi\}$ $\infty^{p+\delta-1}$.

Il numero delle intersezioni di p varietà, delle quali h scelte entro il sistema $\{\Theta\}$ e $p-h$ nel sistema $\{\Phi\}$, si determina seguendo le tracce di II, n. 6. Si formerà il determinante $\|m_{ik} + r\mu_{ik}\|$, dove r è un parametro e le μ_{ik} sono tutte nulle tranne le $\mu_{i,i+p} = -\mu_{i+p,i} = 1$; se ne costruirà il pfaffiano; se $\binom{p}{h} I_{p-h}$ è il coefficiente di r^h nel detto polinomio, il numero richiesto sarà

$$[\Theta^h \Phi^{p-h}] = p!\, I_{p-h}. \tag{31}$$

Questo risultato può anche esprimersi in forma diversa, ove si riprenda la rappresentazione geometrica dello Scorza (I, n. 2), in cui le p righe della matrice (30) hanno per immagini p punti di uno spazio Σ_{2p-1}, i quali vi determinano uno spazio τ a $p-1$ dimensioni. Ai sistemi continui $\{\Theta\}$ e $\{\Phi\}$ sono associate due reciprocità nulle dello spazio Σ_{2p-1}

$$A \equiv \Sigma(\xi_l \eta_{p+l} - \xi_{p+l} \eta_l) = 0 \ , \qquad B \equiv \Sigma m_{ik} \xi_i \eta_k = 0$$
$$(l = 1 , \dots , p \ ; \quad i , k = 1 , \dots , 2p)$$

che mutano ogni iperpiano per τ in un punto di τ. La omografia prodotto $A^{-1}B$, che ha il determinante

$$\delta^2 = \|m_{ip+1} \dots m_{i\,2p} \ - m_{i1} \dots - m_{ip}\| \qquad (i = 1 , \dots 2p),$$

trasforma τ in se stesso. Segue (Scorza) l'esistenza di p^2 costanti π_{hl} (per

$h, l = 1, \dots, p$) le quali soddisfano alle $2p^2$ uguaglianze

$$(32)\qquad \begin{cases} \pi_{hl} = m_{l\,p+h} - m_{l1}\,\sigma_{h1} - \cdots - m_{lp}\,\sigma_{hp}\,, \\ \sum_{i=1}^{p} \pi_{hi}\,\sigma_{il} = m_{p+l\,p+h} - m_{p+l1}\,\sigma_{h1} - \cdots - m_{p+l\,p}\sigma_{hp}\,. \end{cases}$$

Di qua risulta (con Hurwitz) che le p relazioni

$$(33)\qquad j_h(\zeta'_1) + \cdots + j_h(\zeta'_p) = \pi_{h1}\,j_1(\zeta) + \pi_{h2}\,j_2(\zeta) + \cdots + \pi_{hp}\,j_p(\zeta)$$

definiscono una corrispondenza algebrica sulla curva C, per la quale ad ogni punto ζ corrispondono p punti $\zeta'_1, \dots, \zeta'_p$; la corrispondenza è simmetrica nel senso di Rosati, cioè equivalente alla propria inversa.

Per interpretare il risultato teniamo presente che una varietà intermediaria Φ, entro V_p, rappresenta su C una serie algebrica ∞^{p-1} di gruppi di p punti, cioè una γ_p^{p-1}, il cui gruppo generico è non speciale. La serie (come la Φ) appartiene ad un sistema continuo $\infty^{p+\delta-1}$. Viceversa ogni serie γ_p^{p-1} di gruppi non equivalenti è rappresentata da una Φ. Si vede dunque che *ad ogni serie algebrica* γ_p^{p-1} *della curva* C *è collegata una corrispondenza algebrica simmetrica sulla* C. Precisamente, data la γ_p^{p-1}, od una qualunque serie del sistema continuo a cui essa appartiene, restano determinate le infinite corrispondenze che, nella rappresentazione analitica, presentano gli stessi moltiplicatori π_{hl} o $-\pi_{hl}$. Quale sia il legame geometrico tra la serie ed una delle dette corrispondenze sarà visto nelle ultime righe di questa Nota.

Coi coefficienti π_{hl} formiamo la equazione caratteristica

$$(34)\qquad \begin{vmatrix} \pi_{11} + r & \dots & \pi_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ \pi_{p1} & \dots & \pi_{pp} + r \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$(35)\qquad r^p + i_1\,r^{p-1} + \cdots + i_{p-1}\,r + i_p = 0 \qquad (i_p = \delta).$$

I caratteri i_h sono *invarianti* della corrispondenza (33) o della serie γ_p^{p-1}, sia rispetto alle trasformazioni birazionali della curva, sia rispetto ai cambiamenti dei tagli canonici sulla relativa riemanniana. Il loro significato geometrico risulta chiaro, se si ricorda (1) che il quadrato del determinante (34) uguaglia il determinante $\|m_{ik} + r\mu_{ik}\|$ sopra considerato, e che quindi il polinomio (35) ne è il pfaffiano. Con ciò la (31) diviene

$$(36)\qquad [\Theta^h\,\Phi^{p-h}] = h!\,(p-h)!\,i_{p-h}$$

e dà luogo al seguente enunciato:

(1) Ved. ad es. Rosati, *Sulle valenze delle corrispondenze algebriche* ..., in Atti dell'Accad. delle Scienze di Torino, vol. 53 (1917).

Insieme ad una serie algebrica γ_p^{p-1} *sopra una curva di genere* p *si considerino le infinite serie del sistema continuo a cui essa appartiene, e le serie* $\gamma_p^{p-2}, \gamma_p^{p-3}, \ldots$ *formate dai gruppi* G_p *comuni a due, tre ... di quelle serie. Il numero dei gruppi* G_p *che stanno in una di queste* γ_p^h *e in* h *serie lineari* g_{2p-1}^{p-1} *è generalmente finito ed è dato dalla formola* (36).

11. Vi sono però altri caratteri più espressivi della γ_p^h che interessa conoscere; ad es. l'*indice*, cioè il numero dei gruppi della serie che contengono h punti generici di C. È questo il numero delle intersezioni, entro V_p, di $p-h$ varietà del sistema $\{\Phi\}$ e di una varietà V_{p-h} rappresentante i G_p con h punti fissi; la quale V_{p-h}, come fu già detto (n. 9), è intersezione parziale di h varietà Θ speciali. Si tratta dunque di decidere quante delle intersezioni (36) vengano assorbite dalla W_{p-2} per cui passano ora le h varietà Θ. Questo difficile problema di geometria numerativa son riuscito a risolvere soltanto col rendere particolare la curva C; procedimento non immune da obbiezioni. Siccome però le formole ottenute trovano conferma in tutti i casi in cui ho potuto trattare il problema con metodi rigorosi, credo opportuno accennare a quel procedimento e al risultato, la conoscenza del quale potrà suggerire altre vie di ricerca

Consideriamo $h-1$ varietà Θ passanti per la W_{p-2}, le quali si segano, fuori di questa, in una V_{p-h+1}, immagine dei G_p con $h-1$ punti fissi $a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}$. La V_{p-h+1} interseca W_{p-2} lungo una varietà W_{p-h}, immagine dei G_p *speciali* con $a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}$ fissi. La stessa V_{p-h+1} è poi segata da una nuova Θ passante per W_{p-2}, lungo quella W_{p-h} e la V_{p-h} dei G_p con h punti fissi $a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}, a_h$. Si ha dunque, con una scrittura assai chiara,

$$[\Theta V_{p-h+1}] = W_{p-h} + V_{p-h}; \tag{37}$$

e la relazione vale anche se la Θ è una varietà generica del sistema $\{\Theta\}$, purchè si intenda allora che la varietà a $p-h$ dimensioni del primo membro e la varietà spezzata del secondo membro appartengono ad uno stesso sistema continuo entro V_{p-h+1}. Seghiamo ora queste due varietà (37) con una stessa varietà U_h ad h dimensioni, la quale le intersechi in un numero finito di punti. Avremo la uguaglianza tra numeri di intersezioni

$$[\Theta V_{p-h+1} U_h] = [W_{p-h} U_h] + [V_{p-h} U_h]. \tag{38}$$

Per stabilire una relazione tra i due addendi a secondo membro, particolarizziamo la curva C, ammettendo che essa sia iperellittica, ed indichiamo con a_i, a_i' punti coniugati nella g_2^1. Allora i G_p speciali aventi le immagini in W_{p-h} sono gruppi che hanno come fissi i punti $a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}$ e contengono inoltre o il punto a_1', o il punto $a_2', \ldots$, o il punto a_{h-1}', o una coppia generica di punti coniugati bb'. La W_{p-h} si spezza dunque in $h-1$ varietà del sistema continuo a cui appartiene la V_{p-h}, più una

W_{p-h-1} immagine dei G_p contenenti $a_1 . a_2 , \dots , a_{h-1} , b , b'$. Poichè la W_{p-h-1} non sarà incontrata generalmente dalla U_h, segue che

$$[W_{p-h} U_h] = (h - 1) [V_{p-h} U_h]$$

e quindi, (38),

$$[\Theta V_{p-h+1} U_h] = h [V_{p-h} U_h].$$

Se si chiama U_{h-1} la intersezione di U_h con una Θ, poi U_{h-2} la intersezione di U_{h-1} con una Θ, ecc., si ha una serie di relazioni dalle quali, eseguendo il prodotto, si ottiene

$$[V_p U_0] = h! [V_{p-h} U_h] , \tag{39}$$

dove il primo membro indica il numero delle intersezioni di U_h con h varietà Θ. In particolare, se U_h è l'intersezione di $p - h$ varietà del sistema $\{\Phi\}$, il primo membro della (39) ha il valore (36). Segue che

La serie γ_p^h ha l'indice

$$\nu_h = (p - h)! \, i_{p-h} , \tag{40}$$

donde una nuova interpretazione degli invarianti i.

Lo stesso procedimento, mutando il significato particolare di U_h, ci fa vedere che *il numero dei gruppi della serie γ_p^h che hanno $h_1 \leq h$ punti fissi ed appartengono ad $h - h_1$ serie g_{2p-1}^{p-1} è*

$$\frac{(p - h)! \, h!}{h_1 !} \, i_{p-h} . \tag{41}$$

La formola (40) ha una notevole interpretazione analitica. Sia $\varphi((u))$ una funzione intermediaria dei parametri $u_1 , \dots , u_p$ dati dalle (29). Formiamo le $k = p - h$ equazioni

$$\varphi((j(\zeta_1) + j(\zeta_2) + \cdots + j(\zeta_k) - e^{(l)})) = 0 \quad (l = 1 , 2 , \dots , k) , \tag{42}$$

ove le incognite sono k punti $\zeta_1 . \zeta_2 , \dots , \zeta_k$ della curva C, e le $e_1^{(l)} , e_2^{(l)} , \dots , e_p^{(l)}$ sono pk costanti. *Il numero dei gruppi di soluzioni* $(\zeta_1 , \dots , \zeta_k)$ *delle equazioni* (42) *è* $k! \, i_k$.

Se le funzioni φ sono Θ del primo ordine, nel qual caso $i_k = \binom{p}{k}$, il risultato è stato stabilito da Poincaré e Wirtinger, ed è pur contenuto in una formola colla quale Comessatti e Göhner assegnano il numero dei gruppi di k punti comuni a k serie lineari di dimensione $k - 1$. Nella stessa ipotesi, per $k = 1$, si ha un noto teorema di Riemann. L'indicatore logaritmico, di cui egli si vale per stabilirlo, può pure applicarsi ad una funzione intermediaria qualsiasi e conduce a trovare $\sum_{l=1}^{p} m_{l,l+p}$ soluzioni, il qual numero si riconosce proprio uguale ad i_1.

Anche il procedimento dato da Riemann per stabilire le relazioni tra i p zeri di una ϑ si estende alla φ e fa vedere che tra le radici $\zeta^{(1)}, \ldots, \zeta^{(i_1)}$ della (42), per $k = 1$, passano le relazioni

$$(43)\quad j_h(\zeta^{(1)}) + \cdots + j_h(\zeta^{(i_1)}) = \pi_{h1}\, e_1^{(1)} + \cdots + \pi_{hp}\, e_p^{(1)} + \pi_h \quad (h = 1, \ldots, p),$$

dove le π_{hl} sono date dalle (32) e le π_h sono costanti, indipendenti dalle $e^{(1)}$. Segue che la corrispondenza simmetrica (i_1, i_1) determinata sulla C dalla γ_p^{p-1}, quando in essa si tengano fissi $p-2$ punti e si chiamino ζ, ζ_1 i rimanenti due di ciascuno degli ∞^1 gruppi, è rappresentata dalle formole

$$(44)\quad j_h(\zeta_1^{(1)}) + \cdots + j_h(\zeta_1^{(i_1)}) = -[\pi_{h1}\, j_1(\zeta) + \cdots + \pi_{hp}\, j_p(\zeta)] + \pi_h$$

ed è quindi equivalente alla (33); donde una semplice interpretazione geometrica del primo enunciato del n. 10.

Matematica. — *Le linee principali di una superficie di* S_5 *e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese.* Nota I del Socio C. Segre [1].

1. Data una superficie F appartenente a uno spazio S_5, e un suo punto regolare x, fra gl'iperpiani che segano F secondo linee con *punto doppio* in x, — ossia iperpiani passanti pel piano π tangente a F in questo punto, — ne esistono ∞^1 per cui x diventa una *cuspide*, e son quelli tangenti al noto cono quadrico V_4^2 di Del Pezzo uscente da π, che contiene i punti di F infinitamente vicini a x di 1° e di 2° ordine. Fra gli ∞^1 iperpiani ve ne sono poi, in generale, *cinque*, che dànno sezioni aventi in x un *tacnodo* [2].

Le 6 coordinate omogenee x_i del punto x di F siano funzioni dei due parametri u, v. Le derivazioni successive rispetto a questi s'indichino apponendo gl'indici superiori 1, 2, sicchè sia inteso che questi non significheranno esponenti di potenze; e si scriva (ξx) in luogo di $\Sigma \xi_i x_i$, ecc. Si esprime che un iperpiano di coordinate ξ_i sega F in una curva avente in x un tacnodo, colla tangente nella direzione $du : dv$, ponendo le 6 equazioni:

$$(1)\qquad (\xi x) = 0\ ,\ (\xi x^1) = 0\ ,\ (\xi x^2) = 0$$

$$(2)\qquad (\xi x^{11})\, du + (\xi x^{12})\, dv = 0\ ,\ (\xi x^{12})\, du + (\xi x^{22})\, dv = 0$$

$$(3)\qquad (\xi x^{111})\, du^3 + 3(\xi x^{112})\, du^2 dv + 3(\xi x^{122})\, du\, dv^2 + (\xi x^{222})\, dv^3 = 0\ ,$$

[1] Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

[2] Questo fatto è rilevato alla fine del n. 24 dei miei « *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi* » (Rend. Circ. mat. Palermo, tom. 30, 1910_2, pag. 87), da citarsi in seguito brevemente con « *Prelim.* ». — Citerò invece con « *Sup.* » la mia Nota anteriore « *Su una classe di superficie degl'iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine* » (Atti Acc. Torino, 42, 1906-07, pag. 1047). Ivi al n. 4 s'incontra il cono V_4^2 su nominato.

dalle quali, eliminando le ξ_i, si ha per $du : dv$ l'equazione determinante

$$(4)\quad |x, x^1, x^2, x^{11}du + x^{12}dv, x^{12}du + x^{22}dv, x^{111}du^3 + 3x^{112}du^2dv + 3x^{122}du\,dv^2 + x^{222}dv^3| = 0,$$

che determina appunto 5 direzioni $du : dv$, ossia 5 tangenti, e quindi poi 5 iperpiani ξ.

Le formole (1), (2), (3) provengono, per dualità, dalle (14), (22), (26) del n. 23 dei « *Prelim*[i] ». Ma esse si hanno anche subito direttamente, scrivendo i punti di F prossimi a x così:

$$x(u + du, v + dv) = x + x^1 du + x^2 dv + \tfrac{1}{2}(x^{11}du^2 + 2x^{12}du\,dv + x^{22}dv^2) + \cdots,$$

e sostituendo nell'equazione dell'iperpiano ξ [cfr. il n. 8 di « *Sup.* », ove f è l'attuale (ξx)]. Se ξ verifica le (1), la sezione risulta con punto doppio in x, avendo ivi le tangenti date da $(\xi x^{11})du^2 + 2(\xi x^{12})du\,dv + (\xi x^{22})dv^2 = 0$. Perchè si abbia un tacnodo colla tangente $du : dv$ occorre: che questa annulli le 1[e] derivate di quella forma quadratica, il che dà le (2); e inoltre annulli la forma cubica in du, dv, che vien dopo nello sviluppo dell'equazione della curva: e ciò dà la (3).

Dirò *tangenti principali* di F in x le 5 rette nelle direzioni determinate dalla (4), e *linee principali* di F quelle che sono inviluppate da tali tangenti, ossia le linee integrali di quell'equazione differenziale (4). Per ogni punto di F ne passeranno in generale 5.

2. Per un'applicazione da farsi poi, converrà osservare che l'iperpiano ξ, a sezione tacnodale, che verifica le (1), (2), (3) per una radice $du : dv$ della (4), si può anche riguardare come un iperpiano tangente in pari tempo al cono quadrico V_4^2, prima nominato, relativo al punto x di F, ed all'analogo cono V_4^2 relativo al punto $(u + du, v + dv)$. In fatti, il 1° cono è rappresentato come inviluppo dalle (1) e: $(\xi x^{11})(\xi x^{22}) - (\xi x^{12})^2 = 0$. Si scriverà che ξ appartiene anche al 2° cono differenziando totalmente rispetto a u, v queste quattro equazioni. Con ciò, dalle (1) si ottengono soltanto le (2); e dall'altra [che è poi conseguenza delle (2)]:

$$[(\xi x^{22})(\xi x^{111}) + (\xi x^{11})(\xi x^{122}) - 2(\xi x^{12})(\xi x^{112})]du +$$
$$+ [(\xi x^{22})(\xi x^{112}) + (\xi x^{11})(\xi x^{222}) - 2(\xi x^{12})(\xi x^{122})]dv = 0.$$

Ora quest'equazione, applicando convenientemente le (2), si viene a trasformare appunto nella (3).

3. Possiamo definire direttamente le linee principali anche così. Consideriamo la varietà V_3 luogo degli ∞^1 piani π tangenti a F nei punti x di una data linea L. Se quella varietà non è *sviluppabile* (ordinaria), e quindi tale che lungo ogni piano generatore ammetta un S_3 tangente fisso, vi sarà per ogni π un iperpiano (che lo unisce al piano successivo, inci-

dente a π in x) contenente gli $\infty^1 S_3$ tangenti alla V_3 nei punti di π (« *Prelim.* » § 1): diciamo brevemente un iperpiano tangente alla V_3 lungo π. Orbene volendo che L sia linea principale di F, questo equivarrà a dire che: o la V_3 è sviluppabile; o, se no, per ciascun π l'iperpiano tangente alla V_3 lungo esso ha contatto quadripunto con L nel corrispondente punto x: cioè ne contiene l'S_3 osculatore, e non soltanto il piano osculatore, come avverrebbe per una linea qualunque.

Invero si pensi L rappresentata da $v = v(u)$. La V_3 è il luogo del piano π determinato dai punti x, x^1, x^2: cioè il luogo del punto $x + \lambda x^1 + \mu x^2$, al variare di u, λ, μ. L'S_3 tangente in quel punto ad essa è l'S_3 del punto stesso e dei suoi primi derivati, cioè $x^1, x^2, x^1 + v' x^2 + \lambda(x^{11} + v' x^{12}) + \mu(x^{12} + v' x^{22})$. Esso sta, comunque si prendan λ, μ, nello spazio determinato dai punti

$$(5) \qquad x, \quad x^1, \quad x^2, \quad x^{11} + v' x^{12}, \quad x^{12} + v' x^{22}.$$

Questo sarà dunque, nel caso generale, l'iperpiano tangente alla V_3 lungo π. D'altra parte l'S_3 osculatore alla $v = v(u)$ in x è quello dei punti $x, x^1 + v' x^2, x^{11} + 2v' x^{12} + v'^2 x^{22} + v'' x^2, x^{111} + 3v' x^{112} + 3v'^2 x^{122} + v'^3 x^{222} + 3v'' x^{12} + 3v' v'' x^{22} + v''' x^2$. I primi tre di essi (che dànno il piano osculatore a L) stanno già sull'iperpiano (5). Dire che vi giace anche il 4° è come dire che vi sta $x^{111} + 3v' x^{112} + 3v'^2 x^{122} + v'^3 x^{222}$: ossia equivale a scrivere la (4).

Se poi per ogni x di L i punti (5) stanno in un S_3, sicchè la V_3 è sviluppabile, ciò viene a dire che gli elementi omologhi delle prime 5 colonne del determinante (4) son legati da una stessa relazione lineare; e quindi, senz'altro, la (4) è verificata dalla L: ossia questa è una linea principale (1).

4. Quando F è una superficie *sviluppabile*, vale a dire un cono, oppure l'insieme delle tangenti di una curva di S_5, segue subito dalle ultime parole dette che *tutte* le linee segnate su F sono principali.

Consideriamo invece il caso che F sia una superficie non sviluppabile, di quelle (studiate in « *Sup.* ») per le quali le 6 coordinate $x_i(u\,v)$ son soluzioni di una stessa equazione a derivate parziali (di Laplace):

$$(6) \qquad A x^{11} + B x^{12} + C x^{22} + D x^1 + E x^2 + F x = 0,$$

ove A, B, ... son date funzioni di u, v; e cerchiamo quali sono per essa le linee principali.

Applicando la (6) alle sei x_i, moltiplicando per ξ_i, — ove l'iperpiano ξ

(1) Un'altra proprietà geometrica delle 5 tangenti principali è data da E. Bompiani al n. 7 della Nota « *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero* » (Atti Acc. Torino, 48, 1912-13, pag. 393).

sia uno di quelli considerati al n. 1, — e sommando, si trae, grazie alle (1):

$$A(\xi x^{11}) + B(\xi x^{12}) + C(\xi x^{22}) = 0 .$$

Quest'equazione, presa insieme colle (2), ammette due possibilità: 1°) è nullo il determinante dei coefficienti delle tre quantità (ξx^{11}), (ξx^{12}), (ξx^{22}), ossia si ha

$$C du^2 - B du\, dv + A dv^2 = 0 , \tag{7}$$

cioè la direzione $du : dv$ è quella di una delle *caratteristiche* della superficie (« *Sup.* » nn. 13, 14, 15). Per ognuna di queste linee avviene che i piani tangenti nei suoi punti a F formano una V_3 sviluppabile (ordinaria); perciò (n. 3) le caratteristiche rientrano fra le linee principali. 2°) si ha:

$$(\xi x^{11}) = 0 , \quad (\xi x^{12}) = 0 , \quad (\xi x^{22}) = 0 , \tag{8}$$

ossia ξ è l'iperpiano (*iperosculatore*) che sega F in una curva con punto *triplo* in x (« *Sup.* » n. 19) [1]. Allora le (2) son verificate senz'altro, e resta la (3), che dà precisamente la terna delle tangenti a quella curva nel punto triplo (cfr. « *Sup.* » n. 21). E già al n. 22 di « *Sup.* », per questa classe di superficie, avevo chiamato quella terna di rette la *terna delle tangenti principali*.

Concludiamo dunque: *la quintupla delle tangenti principali di una superficie, non sviluppabile, di* S_5, *si scompone, nel caso che la superficie verifichi un'equazione di Laplace, nella detta terna di rette e nella coppia delle tangenti alle caratteristiche (Hessiana di quella terna)* [2].

[1] Dalle sei equazioni (1) e (8) risulta che quest'iperpiano ξ è ben determinato: perchè, avendo escluso che F sia sviluppabile, è unica (« *Sup.* » n. 12) l'equazione (6) verificata dalle x_i, e quindi la matrice quadrata d'ordine 6 delle x_i e delle loro derivate prime e seconde ha la caratteristica 5.

[2] Com'è già avvertito in nota al n. 23 di « *Sup.* », se l'equazione (6) è *parabolica*, ad es° se la superficie è rigata, le linee principali si riducono al sistema *semplice* delle caratteristiche (per le rigate, il sistema delle generatrici rettilinee) ed un altro sistema semplice di linee. E. Bompiani (« *Alcune proprietà projettivo-differenziali dei sistemi di rette negl'iperspazi* », Rend. Circ. mat. Palermo, tom. 37, 1914_1, pag. 305: v. a pag. 314) ha incontrato, fra quelle linee che egli chiama *quasi-asintotiche* per le rigate, questo secondo sistema di linee principali (nella sua notazione sono le $\gamma_{2,3}$), rilevando come la loro determinazione dipenda da un'equazione di Riccati: sicchè vale un teorema analogo a quello noto di P. Serret relativo alle rigate ordinarie.

Matematica. — *Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota II del Corrispondente Francesco Severi.

3. Sieno ora

$$\psi_{q+1} = 0 , \ldots , \psi_p = 0 , \tag{7}$$

$p - q$ aggiunte ad F, d'ordine $m - 3$, che stacchino curve indipendenti sopra un generico piano $y = \text{cost}$, per guisa che il sistema lineare

$$\lambda_{q+1} \psi_{q+1} + \cdots + \lambda_p \psi_p = 0 \tag{8}$$

ha la dimensione $p - q - 1$.

Non si potrà però esigere, come per le aggiunte d'ordine $m - 2$ del sistema (6) sopra costruito, che le (7) stacchino $p - q$ curve indipendenti sopra *ogni* piano $y = \text{cost.}$; chè anzi, se $p_g > 0$, esisterà sempre un numero finito di piani $y = \text{cost.}$, su cui le curve suddette saranno linearmente dipendenti. Invero entro il sistema lineare V', di dimensione $p + p_a - 1$, delle aggiunte d'ordine $m - 3$, la varietà W' delle superficie spezzate in un'aggiunta d'ordine $m - 4$ ed in qualche piano $y = \text{cost.}$, è di dimensione p_g, e quindi W' ha in comune un numero finito di elementi con un sistema lineare generico, di dimensione $(p + p_a - 1) - p_g = p - q - 1$, appartenente a V'. *I valori di y per cui accade che le curve* (7) *divengano linearmente dipendenti, si diranno i valori critici di y* (per la stretta analogia che hanno con quelli considerati da Poincaré).

Il valore $y = \infty$, nei riguardi di questo concetto, si tratta come ogni altro valore finito di y, perchè la proprietà che definisce i valori critici ha carattere proiettivo (1).

Se $p_g = 0$ non esiste alcun valore critico pel sistema (8), perchè se in un piano $y = y_0$ le (7) dessero curve dipendenti, esisterebbe una superficie di (8) contenente quel piano.

(1) Non è difficile provare che si possono scegliere le (7) in guisa che vi sia un solo valor critico prefissato, p. es. $y = y_0$ (occorre all'uopo considerare le aggiunte ad F d'ordine minimo $m - \mu - 3$ e formare con esse altrettante aggiunte linearmente indipendenti d'ordine $m - 3$, aggregando il piano $y - y_0 = 0$ contato μ volte; poi considerare il massimo numero di aggiunte linearmente indipendenti d'ordine $m - \mu - 2$ tali che il loro sistema lineare non contenga alcuna aggiunta spezzata in un piano $y = \text{cost.}$ e in un'aggiunta d'ordine $m - \mu - 3$, e formare con esse altrettante aggiunte d'ordine $m - 3$, aggregando il piano $y - y_0 = 0$ contato $\mu - 1$ volte; ecc.). Naturalmente il valore $y = y_0$ sarà allora un valore critico multiplo, d'ordine di molteplicità eguale all'ordine delle varietà W' (che è assimilabile ad un luogo di ∞^1 spazî lineari di dimensione $p_g - 1$).

Osserviamo infine che il sistema (8) può esser sempre scelto in guisa da evitare che uno o più *prefissati* valori di y ($y = \alpha$, $y = \beta$, ... ed eventualmente $y = \infty$), in numero finito, siano critici. Basta all'uopo scegliere entro V' il sistema (8) in modo che non incontri i sistemi lineari $\infty^{p_q - 1}$ delle superficie spezzate nei piani $y = \alpha$ o $y = \beta$, ... e in aggiunte d'ordine $m - 4$. Riassumendo:

Scelte $p - q$ *aggiunte d'ordine* $m - 3$ *ad* F

$$\psi_{q+1} = 0 , \ldots , \psi_p = 0 , \tag{7}$$

le quali seghino $p - q$ *curve indipendenti sopra un piano generico passante per la retta* r, *se* $p_q > 0$, *c'è un numero finito di piani eccezionali del fascio* r *su cui le* (7) *dànno curve linearmente dipendenti; e si può sempre sceglier le* (7) *in modo da evitare che uno o più prefissati piani del fascio, in numero finito, siano eccezionali.*

4. Consideriamo ora il sistema lineare, che indicheremo con L:

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_q \varphi_q + (\lambda_{q+1} \psi_{q+1} + \cdots + \lambda_p \psi_p)(y - y_0) = 0 \tag{9}$$

di aggiunte d'ordine $m - 2$, il qual sistema riducesi a:

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_q \varphi_q + (\lambda_{q+1} \psi_{q+1} + \cdots + \lambda_p \psi_p) = 0 , \tag{9'}$$

quando sia $y_0 = \infty$.

Dico che il sistema L ha la dimensione $p - 1$. Infatti la (9) — o la (9') — non può ridursi a un'identità in x , y , z per valori tutti nulli delle $\lambda_1 , \ldots , \lambda_q$, senza che sieno contemporaneamente nulle tutte le $\lambda_{q+1} , \ldots , \lambda_p$; e viceversa. Nè d'altronde può darsi che sia diversa da zero qualcuna delle λ del 1° gruppo e qualcuna delle λ del 2° gruppo, perchè allora vi sarebbe qualche superficie del sistema (6), contenente come parte il piano $y - y_0$.

Denotiamo con π il sistema lineare:

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_q \varphi_q = 0 \tag{6}$$

e con K il sistema lineare:

$$(y - y_0)(\lambda_{q+1} \psi_{q+1} + \cdots + \lambda_p \psi_p) = 0 , \tag{10}$$

che riducesi alle superficie del sistema (8), cui si aggreghi il piano improprio, quando $y_0 = \infty$.

E chiamiamo, come prima, *valori critici di* y *rispetto al sistema* L, quelli per cui le curve (9) risultano linearmente dipendenti.

È chiaro che tutti i valori critici del sistema lineare (8) sono critici pel sistema lineare L; e che inoltre L possiede come valore critico $y = y_0$ (o $y = \infty$, se $y_0 = \infty$), perchè sul piano $y = y_0$ le curve di L riduconsi soltanto a q indipendenti.

Orbene, dico che L non possiede altri valori critici, oltre ai nominati. Infatti, se esistesse un valor critico $y = \alpha$, diverso dai precedenti, si avrebbe per convenienti valori $\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_p^{(0)}$ non tutti nulli dalle λ, l'identità rispetto ad x, z:

$$\lambda_1^{(0)} \varphi_1(x, \alpha, z) + \cdots + \lambda_q^{(0)} \varphi_q(x, \alpha, z) + \\ + (\alpha - y_0)(\lambda_{q+1}^{(0)} \psi_{q+1}(x, \alpha, z) + \ldots) \equiv 0,$$

donde si trae:

$$\lambda_1^{(0)} \varphi_1(x, y, z) + \cdots + (y - y_0)(\lambda_{q+1}^{(0)} \psi_{q+1}(x, y, z) + \cdots) \equiv (y - \alpha) \psi(x, y, z),$$

$\psi = 0$ essendo un'aggiunta d'ordine $m - 3$.

Ora le $\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_q^{(0)}$ non potrebbero essere tutte nulle, perchè altrimenti si cadrebbe in uno dei valori critici già nominati; dunque la superficie $\lambda_1^{(0)} \varphi_1(x, y, z) + \cdots + \lambda_q^{(0)} \varphi_q(x, y, z) = 0$ del sistema π dovrebbe segare su ogni piano $y =$ cost., fuori della retta r, una curva appartenente a qualche superficie aggiunta d'ordine $m - 3$: il che contraddice al modo con cui fu scelto π. Posto:

$$(11) \qquad \varphi_{q+1} \equiv (y - y_0)\psi_{q+1}, \ldots, \varphi_p \equiv (y - y_0)\psi_p,$$

si può enunciare che:

Il sistema lineare L *di equazione*:

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_q \varphi_q + \lambda_{q+1} \varphi_{q+1} + \cdots + \lambda_p \varphi_p = 0,$$

non possiede altri valori critici, all'infuori di quelli che sono critici pel sistema:

$$\lambda_{q+1} \varphi_{q+1} + \cdots + \lambda_p \varphi_p = 0.$$

Giacchè appunto i valori critici di questo sistema K sono quelli critici pel sistema (8), coll'aggiunta del valore critico $y = y_0$. Se $p_g = 0$, l'unico valor critico di L è $y = y_0$ (o $y = \infty$, se $y_0 = \infty$).

5. Dalle proposizioni dimostrate nei nn. 3, 4, si deduce che se $y = \alpha$ è un valor critico di L, si possono sostituire alle $\varphi_{q+1}, \ldots \varphi_p$, altre $p - q$ aggiunte d'ordine $m - 2$, linearmente indipendenti, $\varphi'_{q+1}, \ldots, \varphi'_p$, in guisa che pel nuovo sistema L':

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_q \varphi_q + \lambda_{q+1} \varphi'_{q+1} + \cdots + \lambda_p \varphi'_p = 0$$

il valore $y = \alpha$ non sia più critico od anche che non siano critici certi valori prefissati $y = \alpha$, $y = \beta, \ldots$ (ivi compreso eventualmente $y = \infty$). Se $\alpha = y_0$ si ottiene senz'altro l'intento aggregando alle $\psi_{q+1}, \ldots, \psi_p$ il piano fisso $y - y_1 = 0$ $(y_1 \neq y_0)$ invece del piano $y - y_0 = 0$.

Si avrà allora $\varphi'_{q+1} = (y - y_1)\psi_{q+1}, \ldots, \psi'_p = (y - y_1)\psi_p$, cioè:

$$(12) \qquad \varphi'_{q+1} = \frac{y - y_1}{y - y_0} \varphi_{q+1}, \ldots, \varphi'_p = \frac{y - y_1}{y - y_0} \varphi_p.$$

Il determinante di questa sostituzione lineare, che fa passare dalle φ alle φ', riducesi a $\left(\frac{y-y_1}{y-y_0}\right)^{p-q}$. Esso annullasi pel valore $y=y_1$, che è critico rispetto alle φ', e diviene infinito pel valore $y=y_0$, che è critico rispetto alle φ.

Se $y=\alpha$, $y=\beta,\ldots$ sono valori diversi da y_0, critici per L, cioè pel sistema (8), in forza del n. 3, si potranno sostituire alle $\psi_{q+1},\ldots,\psi_p$ altre $p-q$ aggiunte d'ordine $m-3$, linearmente indipendenti, $\psi'_{q+1},\ldots,\psi'_p$, in guisa che $y=\alpha$, $y=\beta,\ldots$ non siano critici. Allora posto:

$$\varphi'_{q+1}=(y-y_0)\psi'_{q+1},\ldots,\varphi'_p=(y-y_0)\psi'_p, \tag{13}$$

il nuovo sistema L′ non avrà più i valori critici $y=\alpha$, $y=\beta,\ldots$

Qual'è il legame fra le φ' e le φ, cioè fra le ψ' e le ψ? La curva staccata dalla ψ'_{q+i} sopra un generico piano $y=\text{cost}$ si esprime linearmente mediante le sole $\psi_{q+1},\ldots,\psi_p$, appunto perchè le aggiunte d'ordine $m-3$ staccano su quel piano un sistema ∞^{p-q-1}. I coefficienti di tale combinazione lineare sono univocamente determinati, perchè altrimenti per y generico si avrebbe fra le $\psi_{q+1},\ldots,\psi_p$ un legame lineare. Dunque i coefficienti di quella combinazione lineare sono funzioni razionali di y. Fra le ψ' e le ψ si avrà pertanto una sostituzione lineare del tipo:

$$\psi'_{q+i}=\sum_{j=1}^{p-q}a_{ij}\,\psi_{q+j}\qquad(i=1,\ldots,p-q), \tag{14}$$

le a_{ij} essendo funzioni razionali di y. Se $y=\eta$ è un valore per cui il determinante $|a_{ij}|$ delle a si annulla, fra le $p-q$ forme lineari (14), ove in esse si ponga $y=\eta$, risulterà un legame lineare a coefficienti costanti non tutti nulli. Il che significa che η è un valor critico del sistema delle ψ'. Viceversa, se η è critico per le ψ', sussisterà, per valori non tutti nulli delle $\lambda^{(0)}$, un'identità, rispetto ad x,z, del tipo:

$$\sum_{i=1}^{p-q}\lambda^{(0)}_{q+i}\sum_{j=1}^{p-q}\bar{a}_{ij}\,\overline{\psi}_{q+j}\equiv 0,$$

(ove $\bar{a}_{ij},\overline{\psi}_{q+j}$ sono i valori di a_{ij},ψ_{q+j} per $y=\eta$), cioè:

$$\sum_j\overline{\psi}_{q+j}\sum_i\bar{a}_{ij}\lambda^{(0)}_{q+i}\equiv 0, \tag{15}$$

donde si trae che o sussistono le relazioni $\sum_i\bar{a}_{ij}\lambda^{(0)}_{q+i}=0$ e allora il determinante delle $\bar{a}$ è nullo; oppure fra le $\bar{\psi}$ havvi il legame (15) a coefficienti costanti, non tutti nulli.

Dunque gli zeri della funzione razionale $|a_{ij}|$ cadono nei valori di y che son critici pel sistema delle ψ' senza contemporaneamente esser critici pel sistema delle ψ. Considerando poi la sostituzione lineare inversa della (14)

si vede subito che $|a_{ij}|$ diviene infinito soltanto nei valori di y che son critici pel sistema delle ψ, senza esserlo pel sistema delle ψ'.

Questo risultato vale anche nel caso prima esaminato della sostituzione lineare (12) $\left(a_{ii} - \frac{y-y_1}{y-y_0}\right.$, $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$), perchè in tal caso i soli valori critici, che non siano comuni alle ψ, ψ', sono appunto y_0, y_1.

Ricordando le (11), (13) la (14) si scrive:

$$\varphi'_{q+i} = \sum a_{ij} \varphi_{q+j}, \tag{16}$$

e si conclude che:

Se il sistema lineare L *possiede i valori critici* $y = \alpha$, $y = \beta, \ldots$ *si posson sempre cangiare le* $\varphi_{q+1}, \ldots, \varphi_p$, *sostituendole con altre* $p - q$ *aggiunte indipendenti d'ordine* $m - 2$, $\varphi'_{q+1}, \ldots, \varphi'_p$, *in guisa che quei valori non siano più critici pel nuovo sistema* L':

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_q \varphi_q + \lambda_{q+1} \varphi'_{q+1} + \cdots + \lambda_p \varphi'_p = 0.$$

Le $\varphi'_{q+1}, \ldots, \varphi'_p$ *son legate alle* $\varphi_{q+1}, \ldots, \varphi_p$ *da una sostituzione lineare del tipo* (16), *ove le* a *son funzioni razionali di* y *e il determinante* $|a_{ij}|$ *delle* a *si annulla pei valori di* y *che son critici pel sistema* L', *ma non per* L; *e diviene infinito pei valori che son critici per* L, *ma non per* L'. *In particolare* $|a_{ij}|$ *presenta singolarità polari in* $y = \alpha$, $y = \beta \ldots$

Osservazione 1ª. — Il determinante $|a_{ij}|$ si riduce ad una costante (non nulla) allora e solo allora che L, L' hanno gli stessi valori critici.

Osservazione 2ª. — Ridotte le funzioni razionali a_{ij} allo stesso minimo determinatore comune, che sia il polinomio $a(y)$, le (16) potranno scriversi:

$$a(y) \varphi'_{q+1} = \sum b_{ij} \varphi_{q+j},$$

ove le b son polinomi in y. Si può ora supporre che il sistema L abbia il solo valore critico $y = \infty$, e ciò perchè si può assumere come equazione di L:

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_q \varphi_p + \lambda_{q+1} \psi_{q+1} + \cdots + \lambda_p \psi_p = 0,$$

ove il sistema delle ψ abbia come solo valor critico $y = \infty$ (n. 3). Allora il determinante $\left|\frac{b_{ij}}{a(y)}\right| = \frac{1}{a^{p-q}} |b_{ij}|$, avrà il solo polo $y = \infty$ e quindi $a(y)$ dovrà ridursi ad una costante. Ne consegue che *si possono scegliere le* $\varphi_{q+1}, \ldots, \varphi_p$ *in tal guisa che per ogni scelta delle* $\varphi'_{q+1}, \ldots, \varphi'_p$ *i coefficienti della sostituzione* (16) *sieno polinomi in* y.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Geomorfologia. — *Lo svolgimento erosivo considerato a partire da una superficie fondamentale.* Nota di G. Rovereto, presentata dal Socio A. Issel (1).

Tutte le nostre regioni montuose appenniniche, e buona porzione delle alpine, presentano per estesi tratti delle profilazioni più o meno unite, orizzontali nella parte mediana dei rilievi, decrescenti in modo regolare verso le depressioni laterali, con le quali si può idealmente ricostrurre una superficie continua, anteriore all'incisione delle valli e allo scolpimento delle montagne. Dove tale ricostruzione non è possibile, perchè l'erosione ha eccessivamente intagliato, manca il modo di stabilire il principio del successivo svolgimento erosivo.

La esatta concezione di tale superficie, che si può chiamare *fondamentale*, richiede anche il riconoscimento del modo con cui si è originata.

Comincio col richiamare delle mie ripetute affermazioni, che credo di aver anche sufficientemente provate. La massima parte dell'Appennino settentrionale è sorta per la prima volta come catena, avente gli elementi attuali, alla fine dell'oligocene. La parte più alta dell'inarcatura, dipendente da questo sollevamento, costituisce la zona per la quale si svolge ondeggiante, a causa delle azioni incisorie posteriori e laterali, lo spartiacque della catena. I fianchi della stessa curva sono stati: nuovamente ondulati dall'orogenesi attenuata posteriore, o nuovamente inarcati da movimenti epirogenetici; ripetutamente incisi e modellati dai mari miocenici, pliocenici, quaternari, dei quali rimangono sopratutto dei *piani di regressione*, terrazzati infine dall'eustatisia quaternaria.

A seconda del modo con cui si succedettero, o si alternarono questi fenomeni, le profilazioni delle costole montuose salienti dal mare, o dalla pianura, verso la parte mediana del rilievo, variano nella continuità e nella accentuazione; e dalla curva continua e uniforme si passa alla linea spezzata, attraversante più ripiani, disposti a scala.

Così, dove il Braun ha delineato, attraverso l'Appennino settentrionale, i suoi profili morfologici, abbiamo la curva d'insieme che è la somma delle varie curve di sollevamento epirogenetico dell'oligocene, del miocene e del pliocene, e abbiamo gli intagli dovuti ai piani di regressione dei mari degli ultimi due di questi tempi. Braun spiega in altra maniera, seguendo in modo non chiaro il concetto della *peneplanation*, di cui ora diremo.

(1) Presentata nella seduta del 2 gennaio 1921.

Vi è una porzione del versante settentrionale dell'Appennino Ligure occidentale e delle Alpi Liguri, dalla valle dell'Orba alle Bormide, che presenta all'occhio, continue e profilate in modo perfetto, numerose costole montuose traversali, in cui sono ben visibili i piani di regressione corrispondenti ai ritiri dell'oligocene superiore, dell'aquitaniano, del langhiano, man mano sempre più bassi, per modo che il posteriore non ha potuto distruggere l'anteriore, e accompagnati dai loro cicli di sedimentazione; il tutto collegato alla curva di sollevamento epirogenetico determinatosi in più riprese, e, come tali piani, a cominciare dall'oligocene superiore.

Le influenze tettoniche ed epirogeniche, e gli effetti dell'abrasione marina ad esse associati, possono essere simulati o sostituiti da forme di altra origine, ma riconoscibili se la regione è ben studiata nella sua storia geologica. Sono in modo precipuo: le prolungate azioni subatmosferiche di denudazione, quando abbiano appianato dove era il rilievo, o viceversa prodotto il rilievo dove era il piano; le condizioni strutturali, sopratutto consistenti in strati orizzontali conservanti la loro superficie originaria, o una superficie di erosione ma *conforme* alla stratificazione; i movimenti verticali, con gli spostamenti scalari che ne derivano; l'azione erosiva continentale, tanto uniformemente distribuita da rendere livellate le costole interposte fra le valli contigue, osservazione, questa, avanzata per la prima volta dallo Shaler e subito condivisa dallo Smith (1).

Il primo verso di questa enumerazione ci porta in pieno nella teoria della *peneplanation*. Per non ripetere dubbi o riserve già avanzate, diremo solo che con il vocabolo *peneplain*, che ormai si è tanto generalizzato, sino a perdere il significato genetico, e a ridursi a quello morfologico, quando il Davis lo introdusse, voleva indicare un appianamento verificatosi a spese di una regione in rilievo, per opera di una prolungata erosione subatmosferica, e con rapporti fissi rispetto al livello di base. Ciò quindi manca alla nostra Penisola, che è terra di ieri; e forse solo entra come elemento morfologico, però anche lì profondamente modificato, in Sardegna.

Ciò che invece osserviamo nella Penisola è il contrario: è il piano di abrasione convertito in semipiano nel senso morfologico: sono, ad esempio, le superficie spianate dal mare pliocenico in regressione, terminali ai monti della Calabria, quelle oligoceniche terminali all'Appennino Ligure, che hanno subìto tale trasformazione, e che nonostante sono state dette peneplain dal Gignoux le prime, dal Davis le seconde. Vi ha un piano costiero quasi intatto, perchè di regressione marina quaternaria, dei dintorni di Ancona, che è stato considerato un peneplain dal Sawicki.

(1) Shaler N. S., *Spacing of rivers with reference to hypothesis of base leveling.* Bull. Geol. Soc. Amer. vol. X, 1899, pag. 263; Smith W. S. E., *Some aspects of erosion in relation to the theory of the planation.* Univ. Cal. Bull. Dept. Geol., II, pag. 155. 1899.

E quando, come ancora in Calabria e come in Dalmazia e altrove, a partire dai piani di abrasione terminali, i versanti laterali cadono a scaglioni, che sono dovuti anch'essi ai movimenti del mare, chiudendo gli occhi all'evidenza, si invoca un complicato e inesistente sistema di movimenti verticali.

La conformazione a scaglioni, ridotta a terrazzi in Calabria, si osserva tutt'attorno al Mediterraneo, con ampi e continui pianori, sopratutto conservati dove si ha la steppa o il carsismo, come in Dalmazia, in Grecia, nell'Asia Minore, nella Siria. Quando io ebbi a studiarla in Dalmazia, la spiegai come ora faccio (1): ossia asserii, che i diversi ripiani in cui è divisa quella parte delle Dinariche sono dovuti ai mari dell'oligocene, del miocene, del pliocene; che date queste instabilità recenti non era il caso di parlare di *peneplanation*: e fin d'allora estendevo queste considerazioni all'Appennino.

Ma seguirono affermazioni affatto discordi. Il Grund (2) poco dopo sosteneva, che la conformazione scalare della costa adriatica risulta da faglie recenti, le quali hanno dislocato una piattaforma d'erosione, posteriore ai movimenti del terziario antico: ma in realtà queste faglie non esistono, e per persuadersi di ciò basta esaminare le carte geologiche del Kerner. Con poca differenza l'anno dopo il Cvijic (3) asseriva, che i tre differenti spianamenti del carso di Scardona, di Lika e di Novrs sono delle *Rumpfflächen*, o superficie di denudazione, portate a differenti altitudini da movimenti verticali del pliocene superiore. E il Katzer (4), che mi dava ragione per la questione dei *polje*, insisteva però nel ritenere provata la presenza di tali spostamenti verticali. Lo stesso ripetevano Krebs (5), Bukowski (6) ed altri.

Nella Penisola Istriana, da me visitata di recente, la conformazione a scaglioni è più obliterata di quanto comunemente si crede. Da alcuni punti panoramici della valle del Quieto, ad esempio da Buie, si vede il rilievo dell'*Istria rossa* staccarsi dalla zona littoranea, e crescere lievemente inclinato, e con profilo unito, sino ad unirsi alle alture maggiori dell'*Istria bianca*; onde si può credere che quei varî pianali siano stati coordinati

(1) Rovereto G., *Studi di Geomorfologia*, pag. 173 e seg. Genova, 1908 (da studi eseguiti nel 1905).

(2) Grund A., *Die Oberflächenformen des Dinarischen Gebirges*. Zeit. Ges. Erdk. zu Berlin, 1908.

(3) Cvijic J., *Bildung und Dislozierung der Dinarischen Rumpffläche*. Petem. Mitt., vol. LV, 1909.

(4) Katzer F., *Karst und Karsthydrophie*. Sarajevo, 1909.

(5) Krebs N., *Die Halbinsel Istrien*. Geogr. Abhand., vol. IX. Leipzig, 1907.

(6) Bukowski E., *Notiz über die eruptiven Bildungen der Triasperiode in Süddalmatien*. Verh. Geol. Reichs. 1906.

dalla incurvatura di un sollevamento epirogenetico, stabilendosi così una peculiare superficie fondamentale.

Quelle condizioni strutturali che direttamente dànno luogo alla superficie fondamentale non hanno bisogno di molta dilucidazione. Il caso tipico è quando un insieme di strati orizzontali forma un *tavolato*, che anche morfologicamente è tale, onde può dirsi un *equipiano strutturale*: sono omai ben note le azioni erosive, che dànno luogo a *masse residuali* o *testimoni* dell'antico livellamento e a *semipiani strutturali*, a spese di questi equipiani.

L'azione erosiva continentale producente un grande livellamento, ossia, continuando nella nostra distinzione, un *equipiano erosivo*, è sopratutto quella artica, per la quale appunto è stato introdotto dal Cairnes [1] il vocabolo che usiamo per designarla. Ma abbiamo molte regioni le quali morfologicamente sono equipiani, come la *tompoketsa* di Madagascar, l'*alta pampa* terminale alla Sierra di Cordova in Argentina, sulle quali ancora non è dato di pronunciarsi con sicurezza. Le *rore* di Abissinia rappresenterebbero la avanzatissima distruzione di una *tompoketsa*, la quale quindi sarebbe stata la loro superficie fondamentale.

Abbiamo in Sardegna uno spianamento a spese del cristallino, probabilmente dovuto ad azioni subatmosferiche; quindi un *peneplain* nel vero senso, il quale però è stato invaso parecchie volte dal mare, i cui sedimenti conservano la loro orizzontalità, e che devono perciò aver sostituito un equipiano strutturale al semipiano erosivo: i resti di tale equipiano sono le cosidette *giare*, *tacchi*, *tonneri*. Dopo l'ultima emersione postmiocenica, tale equipiano è diventato la superficie fondamentale nella quale si è incisa l'odierna rete idrografica dell'isola. Un insieme simile di fenomeni il Davis ha riscontrato nel Morvan francese, e ne ha fatto il tipo erosivo *morvan*.

I primi concetti su di una superficie fondamentale trovansi in Italia in scrittori del secolo XVIII: ad esempio, è per questo ben suggestivo un periodo che si legge nei *Viaggi* di Targioni Tozzetti, e che si riferisce al ricostruibile spianamento terminale presentato dalle Colline Senesi.

[1] Cairnes D., *Differential erosion and equiplanation in portion of Yukon and Alaska*. Bull. Geol. Soc of America, vol. XXIII, 1912.

Biologia. — *Sul metabolismo dei reali veri nella società dei Termitidi* (1). Nota II di C. Jucci, presentata dal Socio B. Grassi (2).

Riservandomi di seguire in un lavoro dettagliato i particolari, credo di poter fin d'ora così rappresentarmi l'andamento generale dei fenomeni.

Fin dai primi stadî larvali ha luogo, nel corpo adiposo dei Termitidi, la deposizione di riserve albuminoidi e, come residuo della loro digestione intracellulare, la concrezione di materiali uratici. Probabilmente alla eliminazione di questi s'adoperano attivamente i tubi malpighiani, senza riuscir tuttavia ad impedire il progressivo accumulo dei prodotti catabolici che, specie per gl'intensi processi metabolici della vita ninfale, legati al lavorìo di costruzione, giungono finalmente, nell'insetto perfetto, a riempire tutto il corpo adiposo.

L'alato sciama e si appaia a fondare una nuova colonia.

Malgrado intensi processi d'eliminazione per i tubi malpighiani (3), la massa uratica nel corpo adiposo dei giovani reali va ulteriormente crescendo per smaltimento delle riserve albuminoidi residuali e delle nuove immagazzinate coll'utilizzazione dei materiali istolitici (muscoli alari) e dei prodotti della digestione del quotidiano alimento legnoso.

Con l'aiuto di queste risorse la giovane coppia supera le difficoltà penose dei primi tempi. La reginella comincia a deporre le uova e con lo sposino attende alle cure dell'allevamento: provvedono da sè al proprio sostentamento e a quello della giovane prole. Ma i primi operai che si sviluppano sollecitamente assumono il governo della coloniola, la nutrizione dei genitori e dei piccoli. Difatti in vecchi reali non si rinvengono più urosferiti nel tessuto adiposo (non continuandone la produzione i tubi malpi-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia e Fisiologia comparate della R Università di Roma.

(2) Presentata nella seduta del 19 dicembre 1920.

(3) Nei reali e anche negli alati (*Calotermes*) l'epitelio dei tubi malpighiani è tutto farcito di urosseriti formati o in formazione, evidentemente da materiale fluido filtrato dal plasma e, secondo ogni probabilità, proveniente da solubilizzazione di vecchi urosferiti del tessuto adiposo. Difatti, oltre urosferiti normali e urosferiti in formazione nelle vacuole del citoplasma come per lenta concrezione dei sali urici che vanno raggiungendo la saturazione, ho veduto spesso grosse concrezioni vuote e trasparenti. Si riconoscono anche a luce polarizzata: a nicol incrociati, invece di presentare la netta croce di polarizzazione, appaiono tutte scure all'interno dello strato corticale. Del resto le ricerche sulla trasformazione e il riassorbimento dell'acido urico tendono a provare che i tessuti animali secretano sostanze (urico-ossidasi) che dissolvono rapidamente le concrezioni uriche.

ghiani finalmente riescono a eliminarne l'accumulo) (1), sibbene depositi ptialurici nei tegumenti, nelle cellule pericardiali e nei calici dell'ovidotto: il metabolismo dei reali veri diviene, come il nutrimento, quello stesso dei reali neotenici.

I prodotti urosferitici non sono dunque i materiali catabolici caratteristici del metabolismo reale, legati insomma alla elaborazione deutoplasmica negli elementi sessuali (2), e neppure caratteristici dello sviluppo normale

(1) Questa eliminazione avviene forse in rapporto alla formazione del tessuto adiposo reale. Le interessanti ricerche del Feytaud dimostrano (1912) che « il tessuto adiposo subisce, qualche anno dopo lo sciamamento, una trasformazione completa che conduce all'apparizione di un tessuto adiposo nuovo. Questo tessuto reale si forma soprattutto a spese delle masse adipose antiche per penetrazione e proliferazione dei nuclei leucocitari. E a poco a poco gli elementi neoformati arrivano a sostituirsi completamente agli antichi ». Ora è probabile, le mie ricerche non mi permettono ancora di affermarlo, che, proprio durante questa sostituzione, con la progressiva scomparsa degli elementi adiposi antichi (imaginali), di pari passo scompaiano i depositi urici. D'altra parte, giacchè l'assenza di urosferiti nel corpo adiposo di vecchi reali coincide colla presenza di prodotti ptialurici negli organi escretorî, si presenta probabile l'ipotesi che la formazione del tessuto adiposo reale (la quale non è certo in relazione all'utilizzazione dei prodotti istolitici giacchè, come vide Feytaud, il tessuto adiposo apparso nel torace al posto dei muscoli istolizzati possiede ancora i caratteri del tessuto adiposo del sessuato sciamante) sia in diretto rapporto col cangiamento di regime nutritivo (passaggio dalla alimentazione legnosa a quella per saliva somministrata dalla prole operaia).

(2) A proposito della quale noto che nelle vescicole spermatiche degli alati sciamanti di *Calotermes* si trovano, libere nel lume, oltre a notevole quantità di spermi maturi (aventi la caratteristica figura « a seme di zinnia » descritta dal Grassi), un gran numero di cellule pressochè sferoidali, a protoplasma debolmente basofilo e grosso nucleo irregolarmente sferoide, a struttura omogenea. Cosa rappresentano queste cellule?

Il fatto che nello spermateca delle regine si contengono solo tipici spermi « a seme di zinnia » esclude che possa esservi un dimorfismo negli elementi spermatici maturi. Il fatto che nei testicoli di re dei lobuli son pieni di spermi esclude che la maturazione degli spermatociti in spermi possa avvenire nei deferenti. Sembra quindi doversi considerare queste cellule come cellule destinate alla nutrizione degli spermi. E difatti nelle vescicole spermatiche dei re un denso liquido riempie interamente il lume e vi nuotano in mezzo spermi e pochi elementi nucleari sferoidali, piuttosto acidofili, di cui solo alcuni distintamente contornati da un alone protoplasmatico. Avviene dunque una colliquazione delle cellule suddescritte in succo nutritivo? Si direbbe. (Osservando più attentamente ho veduto, nelle vescicole spermatiche di sciamante, qualche elemento cellulare più grosso, a struttura citoplasmatica reticolare e nucleo piccolo e periferico come in una tipica cellula adiposa). Spero poter presto tornare sull'argomento per precisare la natura di questi elementi e studiarne la differenziazione dagli elementi germinali nel testicolo, ove ritrovo, all'interno dei lobuli, raggruppate fittamente tra loro, o vicine a fasci di spermi, le cellule a nucleo acidofilo. Anche nei testicoli e nei deferenti del *lucifugus* ritrovo questi elementi cellulari caratteristici. Questo di cellule trofiche libere nelle vescicole spermatiche sarebbe un tratto caratteristico dei termitidi anche rispetto agli altri insetti sociali, in rapporto evidente col fatto della persistenza del maschio e della periodica copula (tratto biologico caratteristico della società dei Termitidi).

ad insetto perfetto: giacchè si riscontrano come nei giovani reali veri, negli sciamanti, nelle ninfe, nelle larve, così anche negli individui neutri, soldati e operai.

I prodotti urosferitici sono dunque comuni a tutti gli individui che si nutrono di legno e, in rapporto a questo loro regime alimentare, presentano nell'intestino posteriore l'ampolla cecale piena di protozoi. I prodotti urosferitici mancano negli individui che non assumono alimento legnoso e presentano perciò l'ampolla cecale ridotta a porzione stretta, tubulare, vuota di protozoi: in questi individui, reali neotenici e vecchi reali veri, trovo invece, negli organi escretorî, prodotti ptialurici.

È dunque netta la correlazione tra presenza di urosferiti e regime alimentare legnoso con intervento di protozoi; e resta più che mai assodato il valore del prodotto catabolico ptialurico quale indice dei processi metabolici caratteristici e del regime alimentare speciale pel quale avviene la differenziazione della casta neotenica.

D'altra parte, giacchè prodotti solidi del catabolismo si rinvengono nelle caste di neutri e negli stadî larvali, è sperabile che il loro studio possa, insieme alle osservazioni in natura e alle esperienze di allevamento, fornirci elementi validi per la soluzione definitiva del gran problema che si è preteso oltre oceano, così alla leggera rovesciando quanto il Grassi stabilì, con metodi spicciativi risolvere: la differenziazione delle caste di neutri.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Corbino legge la seguente Commemorazione del Socio Augusto Righi.

La scomparsa di Augusto Righi, del fisico più eminente che abbia avuto l'Italia dall'epoca di Alessandro Volta, va qui ricordata, o egregi Colleghi, con particolare rilievo. Io non intendo rievocare la Sua grande figura nelle singolarissime qualità che lo resero personalmente caro a tutti voi e oggetto di così generale e profonda venerazione. Non ricorderò la Sua vita, tutta intessuta di devozione alla Scienza, al lavoro, alla scuola, alla famiglia; quella vita che seppe compiere il miracolo di trascinare dietro la salma preziosa l'intera massa dei cittadini di Bologna, dal più eletto al più umile, in una tregua imperiosa che tanta perdita seppe imporre alle aspre contese politiche. Io comprimerò la massa di sentimenti che il nome di Augusto Righi suscita in me, che gli fui caro come un allievo spirituale, che ne seguii intensamente e nei particolari meno comuni la grande opera scientifica, che delle briciole della sua feconda produzione feci l'alimento preferito alla mia modesta attività di lavoro.

Mi propongo invece di anticipare, sul nome di Augusto Righi, quello che sarà il giudizio della Storia della Fisica in un avvenire lontano, al di fuori di ogni sentimento di commozione per l'uomo che abbiamo perduto, e con l'attenuazione che i meriti degli uomini di Scienza subiscono inevitabilmente dal tempo. Quel tempo che tante glorie effimere sommerge nell'oblio, quel tempo al quale così poca parte sopravvive del frutto dei nostri lavori.

L'opera scientifica di Augusto Righi si riattacca in modo complesso alle più alte investigazioni teoriche che rilegano in feconda armonia i fatti conosciuti attorno a un'idea dominante, come anche alla indagine sperimentale che ci fornisce la vera e più certa conoscenza del mondo fenomenico, schiudendo campi nuovi di ricerca, e procurando nuove basi sempre più solide alle interpretazioni teoriche. Si riassumono in Lui le qualità più perspicue del pensatore profondo, chiaro e luminoso, con quelle dello sperimentatore impareggiabile; e per il sano equilibrio di tali rare attitudini, egli ragiona quando il pensiero è ben sicuro di raggiungere da solo la meta, ovvero sperimenta quando solo i fatti possono illuminare la via della verità. E così in tutti i campi ch'Egli ha sottoposto alla investigazione penetrante del suo ingegno, per circa mezzo secolo di lavoro geniale e tenace, egli lascia tracce profonde della sua opera, sempre aliena da quell'elemento accidentale e fortuito che costituisce spesso la prima sorgente di successo in tante scoperte.

Io non credo di dover qui passare in rassegna, le 250 memorie e note che costituiscono la produzione scientifica del Righi. Di tanti lavori si imporranno sempre più alla ammirazione dei fisici futuri specialmente quelli relativi a due capitoli fondamentali della fisica: le azioni molteplici esercitate dal campo magnetico, e il meccanismo della scarica elettrica e in genere della propagazione della elettricità nei gas.

I diversi effetti provocati dal campo magnetico han fornito, com'è noto, le prove più sicure e dirette della costituzione elettronica della materia e gli indizi più suggestivi sul meccanismo intimo dei fenomeni fisici. E in tutto questo campo il nome di Augusto Righi è associato alla più belle scoperte della Fisica moderna. Il suo primo lavoro sugli effetti del campo magnetico porta la data del 1878, e riguarda un punto fondamentale di magnetoottica. Con la sua grande conoscenza delle finezze più delicate dell'ottica Egli riuscì a dimostrare, molto prima che si sapesse qualche cosa di sicuro sulla origine della polarizzazione rotatoria magnetica, che il campo modifica la velocità e non il periodo delle componenti circolari della luce incidente.

Per la conoscenza del fenomeno magnetoottico di Kerr le ricerche del Righi hanno un'importanza ancora più considerevole. Noi gli dobbiamo la scoperta dei fatti più interessanti e di quelle leggi generalissime, dette di reciprocità, che hanno servito a stabilire la teoria di questo fenomeno. Intendo segnalare particolarmente la scoperta del fatto che, in incidenza nor-

male. la luce polarizzata rettilineamente si trasforma in luce polarizzata ellitticamente; e che vi è, per conseguenza, un assorbimento disuguale. nel metallo magnetizzato, delle due componenti circolari inverse della luce incidente. Noi dobbiamo riconoscere in questo assorbimento ineguale delle due componenti circolari un fatto sperimentale positivo che può considerarsi come un'anticipazione del celebre effetto Zeeman. Ma vi si riconosce insieme la prima prova che la riflessione sui metalli è determinata dagli elettroni che il metallo contiene e di cui il movimento è modificato dal campo magnetico.

Agli stessi elettroni liberi dei metalli è dovuta, com'è noto, la sua conducibilità elettrica; e noi conosciamo appunto per un lavoro del Righi la profonda modificazione che subisce la conducibilità del bismuto sotto l'azione del campo magnetico. Il Righi aveva anche osservato che la deviazione nel cammino degli elettroni provocata dal campo (fenomeno di Hall) acquista nel bismuto una intensità circa 10 mila volte più grande che negli altri metalli; la sproporzione è così grande che si deve ben considerare questa osservazione come una vera nuova scoperta.

Si è visto più tardi che ai medesimi elettroni liberi deve essere attribuito il trasporto del calore per conduzione nei metalli. Il primo indizio del fondamento reale di questa ipotesi si ha in un'altra azione del campo magnetico scoperta dal Righi, e cioè nella distorsione delle linee isotermiche di un metallo per effetto del magnetismo, e in una modificazione pure osservata da Lui della conducibilità termica del bismuto sempre per effetto del campo.

***

Le ricerche del Righi sulla magnetoottica dei corpi gassosi sono ben conosciute. Basterà richiamare la ingegnosissima disposizione dei nicol incrociati da Lui immaginata per osservare il fenomeno inverso di Zeeman nella fiamma a vapori di sodio. Egli potè così scoprire un fenomeno dei più interessanti, sfuggito, ciò che sembra perfino incredibile, all'osservazione pur così penetrante del Faraday, il quale aveva tentato senza risultato la stessa esperienza, con dei mezzi quasi identici. Con tale disposizione il Righi potè stabilire l'esistenza del fenomeno Zeeman negli spettri a bande; essa inoltre condusse più tardi alla osservazione delle anomalie di polarizzazione rotatoria nelle vicinanze delle righe dei vapori metallici, e in seguito alle celebri esperienze del Wood.

Richiamerò inoltre le ricerche del Righi sulla osservazione del fenomeno Zeeman nelle direzioni comprese fra la longitudinale e la equatoriale; queste esperienze furono riprese dallo stesso Zeeman per la loro grande importanza nella interpretazione delle singolarità constatate da Hale nello spettro delle macchie solari.

***

I lavori del Righi sulle scariche elettriche hanno contribuito con non minore successo alle teorie moderne dei fenomeni fisici.

Quando l'interpretazione balistica data dal Crooks al fenomeno dei raggi catodici era ancora ben lungi dall'esser riconosciuta legittima, il Righi la aveva accettata con piena fiducia; e per confermarla egli immaginò e realizzò le sue belle esperienze sulle ombre elettriche, riuscendo a dare più grande estensione e più solido appoggio alla ipotesi delle particelle elettrizzate in movimento. L'urto degli ioni con le molecole del gas, rese più numerose dalla pressione elevata, doveva determinare una notevole riduzione della loro velocità, fino a renderne possibile la misura diretta. E il Righi eseguì effettivamente la prima misura conosciuta della velocità dei ioni. Inoltre la traiettoria dei ioni doveva essa stessa modificarsi per effetto degli urti assai frequenti, e avvicinarsi all'andamento delle linee di forza, ciò che l'esperienza confermò pienamente. Bisognava appunto produrre tali alterazioni progressive al fascio catodico dell'ampolla di Crooks per renderne quasi tangibile la natura cinetica. La immagine che il Righi si era formata della ionizzazione dopo tali ricerche gli doveva servire di guida preziosa più tardi, quando cioè egli scoperse nel 1896 l'azione ionizzante prodotta nei gas dai raggi X che li attraversano.

E così le stesse idee direttrici guidano i bei lavori del Righi sui fenomeni elettrici provocati dalle radiazioni, fenomeni di cui l'importanza si dimostra ogni giorno più grande.

Io tengo a segnalare particolarmente l'osservazione che i metalli colpiti dalla luce non solo si diselettrizzano se sono carichi negativamente, ma acquistano una carica positiva se erano inizialmente allo stato neutro. Venne così provato che la luce incidente per se stessa, con o senza l'aiuto d'un campo elettrico esterno, basta a provocare l'espulsione degli elettroni contenuti nel metallo. Non sarà inutile ricordare in proposito che è precisamente sulla misura del potenziale positivo finale acquistato dal metallo che si basa la determinazione dell'energia conferita all'elettrone dalla luce incidente; determinazione che ha acquistato un così profondo significato nei riguardi della teoria dei quanti dell'energia luminosa.

***

È ben noto quali grandi progressi abbia compiuto l'ottica delle oscillazioni elettriche per merito delle ricerche del Righi e di coloro che lo seguirono, utilizzando gli ammirevoli apparecchi da Lui costruiti e che si diffusero rapidamente in tutti i laboratori del mondo.

Le esperienze sulle onde elettromagnetiche erano già tanto conosciute e popolari in Italia che la invenzione della radiotelegrafia fatta da un altro

grande bolognese deve ritenersi come inseparabilmente legata all'opera del Righi e come frutto sia pure occasionale di questa. Ma le sue ricerche, indipendentemente dalle applicazioni alle quali diedero origine indiretta, costituiscono il coronamento più felice dell'opera di Hertz, e si può ben dire che i nomi di questi due scienziati resteranno per sempre connessi nella Storia della fisica. Effettivamente il Righi è riuscito a riprodurre brillantemente tutti i fenomeni più importanti dell'ottica fisica, con una semplicità e un'eleganza che richiamano l'opera classica dei Maestri fondatori dell'Ottica; Egli realizzò inoltre alcune manifestazioni particolari delle onde elettromagnetiche, come quelle delle onde secondarie dei dielettrici che danno la dimostrazione più diretta dell'azione elettromagnetica delle correnti di spostamento maxwelliane.

***

Mentre la teoria della scarica nei gas si sviluppava con la rapidità che è la caratteristica della Fisica Moderna, l'insieme dei fenomeni singolari presentati dalle ampolle a vuoto nel campo magnetico opponeva difficoltà notevoli a lasciarsi rinchiudere nella interpretazione generale.

La natura dei raggi magneto-catodici scoperti da Hittorf, cioè di quei brillanti effluvi che disegnano nell'ampolla, partendo dal catodo, il percorso delle linee di forza magnetiche, restava singolarmente oscuro. Alla spiegazione di questo fenomeno si accinse negli ultimi anni l'attività sempre rinascente del Righi. Egli emise l'ipotesi che l'azione del campo faciliti la formazione di particolari sistemi binari, risultanti da un atomo-ione intorno al quale circola un elettrone. Seguendo questa concezione Egli ha eseguito uno studio sperimentale molto approfondito del fenomeno nelle condizioni più svariate, scoprendo così un insieme imponente di fatti nuovi, tutti conformi alla ipotesi direttiva, e che non si prestano ad altra spiegazione più semplice. Egli non ritenne mai di aver dato la prova definitiva della sua ipotesi, dimostrando così di possedere una qualità tanto stimabile quanto rara in un fisico: l'attitudine a utilizzare le ipotesi senza prevenzioni, considerandole come semplici strumenti atti a preparare nuove scoperte.

Ma le sue vedute teoriche lo condussero a enunciare una idea assai suggestiva; secondo la quale il campo magnetico, modificando il percorso degli elettroni nell'atomo, dovrebbe provocare l'espulsione di essi e così dare origine a una specie di magneto-ionizzazione. L'ipotesi non ha per sè stessa niente di arbitrario; ed ha avuto una notevole applicazione in alcuni studî recenti del La Rosa sulla teoria elettronica dei metalli. Ma comunque, guidato da tale ipotesi, il Righi ha potuto scoprire e spiegare alcuni fenomeni di grande interesse; e precisamente le azioni del campo sulla scarica in un'ampolla a vuoto, con le diverse modalità che si manifestano secondo che l'azione si esplica su tutta l'ampolla, o su uno degli elettrodi, o esclusiva-

mente sul gas rarefatto. Quest'ultima azione sul gas possiede un vero carattere di novità del tutto inatteso, e non si presta ad altra spiegazione se non a quella della magneto-ionizzazione. Alla stessa causa egli potè attribuire tutto un nuovo ordine di fenomeni di particolare delicatezza ed eleganza che egli chiamò rotazioni ionomagnetiche.

Dalle ultime indagini eseguite in tal senso, e dirette anche a spiegare con la teoria elettronica le azioni elettromagnetiche di Ampère, lo deviò di colpo negli ultimi tempi un nuovo campo di studio completamente diverso.

Apparirà certo singolare, col tempo, che la celebre esperienza di Michelson e Morley, la quale diede origine a quel vero cataclisma scientifico costituito dalle teorie di relatività, sia stata nelle sue origini discussa e interpretata con tanta disinvoltura anche dai fisici più eminenti. Ci si era tutti abituati a una conclusione che nessuno aveva esaminata con la necessaria accuratezza, pur trattandosi di una conclusione tanto rivoluzionaria nelle conseguenze.

Oggi la teoria della relatività costituisce un corpo imponente di dottrina che si regge da sè, indipendentemente dalla esperienza di Michelson che le diede origine. Ma non per questo è meno interessante la approfondita disamina fatta dal Righi del vero significato di quella esperienza e della necessità del suo risultato negativo in particolari condizioni, sulla base dei principî più ortodossi dell'ottica.

Io ho ancora presente la figura del Righi quando venne appositamente a Roma per comunicare al Collega Levi-Civita e a me i risultati del suo studio, e rivelarci le perplessità del suo spirito di fronte allo inatteso risultato; e Lo ancora vivo il ricordo del senso di ammirazione destato in noi dallo sforzo grandissimo di pensiero e di lavoro che tale ricerca gli aveva dovuto costare, mentre il male inesorabile che doveva poi condurlo alla morte si era già manifestato come una lontana ma sicura minaccia. Per quanto si possa ritenere che sull'argomento da lui trattato l'ultima parola non sia detta ancora, va certo osservato che con le ultime ricerche, le quali lo occuparono fino a qualche ora prima della morte, il Righi diede un nuovo suggello di merito all'opera sua, rivelando fino all'estremo l'acutezza e la vigoria mentale dei migliori anni della sua attività scientifica.

Augusto Righi rappresenta fra i Fisici italiani dell'ultimo secolo come un monte isolato ed altissimo; e resterà tale, purtroppo, almeno per una generazione ancora. L'opera Sua si è svolta nel periodo più fiorente della storia della Fisica, poichè mai si vide addensarsi in così breve volger di tempo tanta mole di grandi scoperte, e così fervido succedersi di teorie nuove, di fatti inattesi, costituenti ciascuno come un ampio squarcio dei veli che nascondono alla mente umana le verità più profonde. Partecipare efficacemente a un còmpito così grandioso era dato solo a poche personalità di gigantesca statura intellettuale; alle altre è consentito appena di seguire i risultati delle altrui indagini, e raccogliere le spighe disperse.

Augusto Righi fu tra i migliori artefici di questa grandiosa costruzione. Il solenne plebiscito di rimpianto col quale fu accolta in tutto il mondo scientifico la notizia della Sua morte vale a sanare qualche penosa dimenticanza passata, e accresce la nostra commozione. Del suo lavoro, che non ebbe requie per mezzo secolo, Augusto Righi non vide la meritata forma di ricompensa ch'era nella coscienza di tutti; ma ne è venuta egualmente, con la sua morte, nuova ondata di gloria all'Italia.

L'Italia gli esprime oggi, attraverso alla mia riverente parola, la sua riconoscenza, e lo colloca nel tempio ideale che accoglie i suoi figli più eletti; in quel tempio che è reso augusto, come nessun altro al mondo, da due millenni di vera civiltà, umana e gentile.

Alle commosse parole dell'oratore si associano il Presidente Volterra e i Soci Pincherle, Ciamician e Paternò; e su proposta del Socio Fano, la Classe delibera di rinnovare alla famiglia Righi le vive sue condoglianze per la scomparsa del compianto Accademico.

Il Corrisp. Di Legge commemora l'Accademico prof. Michele Rajna col seguente discorso:

Il 29 settembre 1920 cessava di vivere in Teglio di Sondrio Michele Rajna Socio corrispondente della nostra Accademia. La sua morte fu nuovo lutto per gli astronomi italiani già rattristati dalle recenti perdite dei loro insigni e venerati colleghi Annibale Riccò, Elia Millosevich, Giovanni Celoria.

Michele Rajna, nato a Sondrio il 28 ottobre 1854 da Paolo Rajna e da Costanza Simonetta, compiuti gli studî universitarî in Pavia conseguì la laurea in matematica nel febbraio 1878 e nel marzo successivo entrò all'Osservatorio di Brera in Milano al quale appartenne fino al gennaio 1903, prima e per pochi mesi col grado di allievo volontario; poscia col grado di assistente e da ultimo con quello di astronomo. Nel 1897 riuscì vincitore nel concorso al posto di professore straordinario alla cattedra di astronomia nell'Università di Palermo a cui egli rinunciò per rimanere all'Osservatorio di Brera. Nel febbraio 1903 fu nominato, in seguito a concorso, professore ordinario di astronomia nell'Università di Bologna e direttore dell'Osservatorio annesso alla cattedra.

I più importanti lavori di Rajna appartengono alla geodesia astronomica che egli eseguì negli anni da lui passati all'Osservatorio di Brera. Sono essi operazioni di latitudine, di differenze di longitudine, di azimut con le quali egli recò un prezioso e largo contributo ai lavori della Commissione geodetica italiana.

In questi lavori di cui le relazioni sono contenute tutte nelle Pubblicazioni del R. Osservatorio di Brera, il Rajna rivelò il senso della perfezione sia nella precisione delle osservazioni, sia nella loro discussione. Ed il loro altissimo pregio fu riconosciuto dai più valenti astronomi e lo riconobbe il suo grande maestro Giovanni Schiaparelli il quale non esitò a dichiarare che essi avevano un'impronta caratteristica di eccellenza e costituivano un merito scientifico eccezionale per il loro autore.

Nè minor studio e minor cura egli pose nella discussione delle osservazioni magnetiche di Milano ed in tre Note inserite nei rendiconti del R. Istituto lombardo di scienze e lettere, la prima nel 1892, la seconda nel 1895 a complemento e rettificazione della prima, la terza nel 1902, espose le sue ricerche intorno alle relazioni tra l'escursione diurna del magnetismo terrestre e la frequenza delle macchie solari.

R. Wolf direttore dell'Osservatorio di Zurigo fin dal 1859 ebbe l'idea di rappresentare con una formola lineare la relazione tra la variazione della escursione diurna della declinazione magnetica ed i suoi numeri relativi esprimenti la frequenza delle macchie solari.

A. Wolfer successore di Wolf fece nel 1895 una ricerca analoga, e traendo partito dalle osservazioni magnetiche di Milano, di Praga, di Greenvich e di Vienna ottenne per Milano valori delle costanti diverse da quelle del Wolf.

Il Rajna dalle medie annuali dal 1836 al 1894 dedusse i valori delle costanti; e poichè gli ultimi 24 anni costituivano un complesso più omogeneo dalle medie annuali dal 1871 al 1894, trasse altri valori delle costanti. Con le costanti del Wolfer e con le sue calcolò tre serie di valori dell'escursione diurna della declinazione magnetica che confrontò con le osservazioni. Dai tre confronti risultava un accordo abbastanza soddisfacente tra i numeri ottenuti dalle osservazioni ed i numeri desunti dal calcolo; ma l'accordo non era perfetto. Il Rajna indicò le cause presumibili delle più o meno sensibili discordanze nè escluse la possibilità di una rappresentazione più fedele mediante una formola diversa da quella lineare assunta da Wolf.

Varî articoli e Note egli pubblicò sugli ecclissi solari e lunari, sul calendario e sopra altri argomenti che per la maggior parte non trascendono i limiti dei lavori e calcoli ordinarî del personale scientifico di un osservatorio, ma anche in questi si nota nell'autore l'abituale tendenza a non lasciar nulla d'intentato perchè il risultato sia il più perfetto ed il meglio dimostrato.

Altre pubblicazioni d'indole e d'intento popolare manifestano la sua attitudine a volgarizzare la scienza. Egli sapeva riuscir chiaro al lettore senza punto venir meno alla precisione scientifica.

Degni pure di essere ricordati sono i suoi articoli ed opuscoli polemici che hanno al pari di altri suoi scritti singolare agilità di forma e piacevole disinvoltura di stile.

Le deplorevoli condizioni in cui il nostro compianto collega trovò l'Osservatorio astronomico di Bologna lo indussero alla convinzione che era da abbandonare l'idea di nuovi impianti nella vecchia torre per i quali con spesa considerabile si sarebbe ottenuto tutto al più un istituto adatto quasi unicamente a scopi didattici. Egli pertanto pensò alla possibilità di erigere un nuovo Osservatorio alla villa Aldini situata sulla collina dell'Osservanza ed ebbe fondate speranze di ottenere la cessione della villa e del terreno adiacente di cui era proprietario il Comune di Bologna, ed un contributo dal Comune della Provincia e dal Governo. Con questa fiducia, confortata dal fatto della convenzione universitaria stipulata pochi anni prima fra il Ministero dell'Istruzione pubblica, il Comune, la Provincia e la Università di Bologna diretta a migliorare le condizioni della Università, studiò un progetto che espose in tutti i suoi dettagli in un'elaborata e dotta relazione al Rettore dell'Università di Bologna, la quale fu pubblicata nel 1906 ed inserita nell'annuario dell'Università per l'anno scolastico 1906-1907.

Egli avrebbe veduta certamente tradotta in atto la sua idea, accolta con sommo favore dalle classi più colte di Bologna e dal plauso degli astronomi, nonostante le resistenze ed i consueti indugi del Ministero dell'Istruzione, se frequenti attacchi di neaurastenia non avessero paralizzato la sua operosità negli ultimi anni della sua vita.

Quando egli passò da Milano a Bologna ritenne primo suo obbligo occuparsi dell'insegnamento al quale non mancò di dedicarsi con fervore finchè glielo permisero le sue condizioni di salute. E così intensamente egli sentiva il dovere della scuola che, riavutosi dalle sofferenze degli assalti di neurastenia mi scriveva ogni volta di essere sopratutto lieto della recuperata salute per essere in grado di riprendere le lezioni più volte interrotte.

Possedeva il Rajna una vasta coltura letteraria, e di questa sua coltura fan fede i suoi scritti di cui non pochi sono un vero modello di stile di chiarezza e di eleganza.

Era egli fin dal 1891 Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Nel 1893 fu nominato membro della R. Commissione geodetica italiana della quale per varî anni fu segretario solerte ed attivissimo. Nel 1903 con la nomina di professore ordinario di astronomia e direttore dell'Osservatorio di Bologna entrò per diritto a far parte dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Nel 1904 fu nominato Socio corrispondente della nostra Accademia.

Cittadino esemplare ebbo un religioso culto per la patria. Spirito equilibrato giudicò uomini e cose con benevola indulgenza. Marito e padre incomparabile ebbe le cure più affettuose per la sua diletta famiglia. Seppe apprezzare le virtù e la non comune intelligenza della eletta donna che fu compagna della sua vita ed ebbe per lei sentimenti di affetto e di devozione illimitati.

Nella commemorazione di Giovanni Schiaparelli letta all'Accademia di Bologna egli diceva che lo spirito di lui riposava nella convinzione dell'oltretomba e a volte sembrava che anelasse alla comprensione dell'infinito ed alla rivelazione dei cieli dopo la morte. L'allievo non pensava diversamente dal suo venerato maestro. E se la sua morte ci addolora, ci conforta il pensiero che nella nuova esistenza ultraterrena egli goda quella pace che gli fu così crudamente contrastata dal terribile male che l'afflisse negli ultimi anni di sua vita.

Su proposta del Presidente si approva di mandare al fratello dell'estinto e Socio dell'Accademia prof. Pio Rajna, un telegramma che esprima a quest'ultimo la parte che prende la Classe alla sventura da cui venne colpito.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Castelnuovo presenta i libri giunti in dono, facendo particolare menzione della *Storia della geometria descrittiva* del Corrispondente G. Loria; del vol. 1° parte VI del *Trattato di anatomia patologica per medici e studenti* pubblicato dal Socio Foà, riguardante l'*Apparato locomotore*, del prof. A. Bonome; e dei volumi I e II, *Meteorologia*, della spedizione antartica inglese.

Il Socio Bianchi presenta un volume da lui pubblicato, contenente le sue *Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici e principî di aritmetica analitica.*

Lo stesso Segretario presenta il 1° fascicolo delle *Esercitazioni matematiche* pubblicate dal Circolo Matematico di Catania; aggiunge che, per iniziativa di alcuni professori di quella Università e di giovani munifici, si è costituito colà un nuovo Circolo Matematico il quale ha promosso due pubblicazioni: le *Esercitazioni matematiche*, dirette dal prof. Cipolla, destinate a raccogliere articoli di carattere storico e didattico, e le *Note e Memorie di matematica*, dirette dal prof. Scorza, per lavori di carattere scientifico. Creare dei nuovi periodici di matematica oggi che antichi gloriosi giornali corrono il rischio di sospendere le pubblicazioni è prova di audacia; a questa il prof. Castelnuovo augura lieta fortuna.

Il Socio Levi-Civita presenta alcune pubblicazioni colle seguenti parole:

Ho l'onore di presentare all'Accademia da parte del collega Maggi la seconda edizione del suo volume sulla *Dinamica dei sistemi.* Questa costi-

tuisce l'ultima parte di un corso di meccanica razionale, il cui disegno generale è quello stesso della *Teoria matematica del movimento dei corpi* pubblicata fin dal 1896, che già riscosse (nella relazione per il conferimento di un premio reale) i lusinghieri apprezzamenti del Beltrami.

Le esigenze didattiche e l'opportunità, oramai generalmente riconosciuta, di rendere più immediata la corrispondenza fra il pensiero e la formula coll'uso dell'agile algoritmo vettoriale, indussero l'A. a rimaneggiare l'opera primitiva in modo che, tra gli stessi confini, divenisse più densa la materia e più diffusa la trattazione. E ne sorsero così quattro volumi (editi più volte), destinati dal Maggi ai suoi studenti, ma utili altresì agli studiosi per la profonda meditazione cui si trovano sottoposti i principî e i punti concettualmente più delicati.

Anche il Socio Guidi mi ha affidato il gradito incarico di una presentazione di libri da parte sua. Egli fa omaggio all'Accademia di una sua recente monografia *Sulla statica delle dighe di sbarramento per laghi artificiali* e del suo ben noto trattato sulla *Scienza delle costruzioni*. Esso consta, come i colleghi sanno, di 7 volumi (compreso uno di esercizi), alcuno dei quali già è pervenuto alla decima edizione.

Sarebbe evidentemente superfluo, anzi addirittura inopportuno, il segnalare all'Accademia, sia pure con la consueta e doverosa concisione, le caratteristiche essenziali di un'opera già da tempo benemerita dell'insegnamento tecnico, che da molti anni è guida precipua dei nostri ingegneri sia per la loro preparazione scolastica, sia per successiva consultazione nei casi dubbî offerti da elevato esercizio professionale.

Ma se è inutile il commento, anche più accetto riescirà, io penso, all'Accademia l'omaggio di un trattato, che è il solo veramente completo e può ben dirsi il trattato nazionale di meccanica applicata alle costruzioni.

G. C.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 marzo 1921.

Berlese A. — Mezzo per separare gli Artropodi raccolti col collettore Berlese dalla terra caduta con essi (Estr. dal « Redia », vol. VII). Firenze, 1921. 8°, pp. 1-4.

Boussinesq J. — Cours de physique mathématique de la Faculté des Sciences, tome III. Paris, 1921. 8°, pp. I-XLVIII, 1-417.

Cornaro M. — Scritture sulla laguna veneta, vol. I. Venezia, 1919. 4°, pp. 1-178.

Fanfani E. — La riforma del Calendario. Pavia, 1920. 8°, pp. 1-9.

Leonardi G. — Monografia delle Cocciniglie italiane. Portici, 1920. 8°, pp, I-VI, 1-555.

Longo B. — Su la partenocarpia (Estr. dalla « Rivista di biologia », vol. II, fasc. VI). Roma, 1920. 8°, pp. 1-15.

L'organisation et l'activité de la Federazione Italiana dei consorzi agrari. Rome, 1920. 8°, pp. 1-17.

Pirotta R. — Commemorazione di Pasquale Baccarini (Estr. dal « Nuovo Giornale botanico italiano », vol. XXVI, 1919, pp. 235-238). Roma. 1920. 8°.

Pottier J. — Recherches sur le développement de la feuille des Mousses. Chartres, 1920. 8°, pp. I-III, 1-144.

Washington H. S. — Italite: a new Leucite Rock (Repr. from the « Journal of the Washington Academy of Sciences », vol. X, pp. 270-272). Washington, 1920. 8°.

Washington H. S. — Italite: a new Leucite Rock (From the « American Journal of Sciences », vol. L, pp. 33-47). Washington, 1920. 8°.

Washington H. S. — Note on Angite from Vesuvius and Etna (From the « American Journal of Science », vol. L, pp. 20-30). Washington, 1920. 8°.

Washington H. S. — The Rhyolites of Lipari (From the « American Journal of Science », vol. L, pp. 446-462). Washington, 1920. 8°.